MIIA – Präsenzaufgaben Nr. 8
13.6 – 15.6.2007

1. Es sei C ein ebener regulärer Jordanbogen mit konstanter Krümmung. Dann ist C ein Geradenstück oder es ist C ein Kreisbogenstück.

2. Es sei C ein regulärer Jordanbogen im Raum mit verschwindender Torsion. Dann liegt C bereits in einer affinen Ebene. Hat C zudem noch konstante Krümmung, so ist C ein Geradenstück oder es ist C ein Kreisbogenstück.

3. Es sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum X. Bekanntlich ist die Supremumsnorm $f \mapsto \|f\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{C}$.

   a) Warum ist $\mathcal{C}$ ein Banachraum?

   b) Zeige: Für alle $x \in X$ ist $f \mapsto f(x)$ eine stetige Linearform $\hat{x} : \mathcal{C} \to \mathbb{K}$ auf $\mathcal{C}$.

   (Man kann sich auch diese Zuordnung vorstellen als ein Integral, das Integral, das dem „Diracmaß" im Punkte x zugeordnet ist.)

4. Für $z = (z_n) \in \ell_2$ ist die Abbildung $\hat{z} : \ell_2 \to \mathbb{K}\,,\ w \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z_n w_n$, wohldefiniert (d.h. hier, es liegt immer Konvergenz vor). Beweis!

   a) Zeige, dass $\hat{z}$ $\mathbb{K}$-linear ist.

   b) Man entscheide, ob $\hat{z}$ stetig ist.

5. Es sei f eine Treppenfunktion und $\mu : J \to \mathbb{R}$ beliebig. Es sei $Z = \{t_k : k = 0, 1, \ldots, m\}$ eine Zerlegung von J zu f, d.h. f ist konstant auf den Zwischenintervallen $]t_{k-1}, t_k[$.

   Für Zwischenvektoren $\tau \in \prod_{k=1}^{m}]t_{k-1}, t_k[= Z_*$ setze

   $$S_\mu(f, Z, \tau) = \sum_{k=1}^{m} f(\tau_k)(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1}))$$

   Man beweise, dass durch Hinzufügen von einem Punkt $t' \in J$ zu $Z' = Z \cup \{t'\}$ und neuer Wahl von $\tau' \in Z'_*$ die Summe sich nicht verändert:

   $$S_\mu(f, Z, \tau) = S_\mu(f, Z', \tau')\,.$$